La Isla del Profesor J.M.Souriau

La isla de Bora Bora con su atolón coralino (polinesia francesa)

Una introducción amena y personal al Algebra Lineal

LA ISLA DEL PROFESOR SOURIAU

Una introducción amena al Algebra Lineal

En una remota isla muy apartada de la civilización, recientemente descubierta por el famoso Profesor Souriau [(1)], y después de una larga exploración, se ha localizado un único ser vivo: Un pobre y solitario cordero.
Tras un minucioso rastreo por la isla para tratar de desvelar el proceso acaecido que pudiera explicar la existencia del tal cordero, eminentes expertos han emitido la siguiente hipótesis:
Hubo un tiempo en donde en la isla cohabitaban, y no precisamente de forma pacífica: lobos, corderos, y serpientes. El proceso evolutivo, que ya se sabe, transforma hasta a las mismísimas piedras, pudo haber seguido diaria e inmutablemente el siguiente escenario:

Por la mañana, hambrientos, cada lobo se zampó a un cordero.
A mediodía, cada cordero restante se busco a una serpiente y se la comió [(2)].
Por la tarde, las serpientes, con la sangre ya más caliente, mataron cada una a un lobo.

Dado el hecho de que ningún cordero, ni siquiera los del la isla del Pr. Souriau, puede subsistir sin comer ni un solo día, y sabiendo que el día del descubrimiento faltaban 18 días para la luna llena, los expertos se hacen la pregunta siguiente:

¿Cuantos animales de cada especie hubo al amanecer, la última luna llena antes del descubrimiento?

N.B. Los expertos presentes en la isla son antropólogos. En esta historia [(3)], saben sumar y multiplicar, más o menos lo que todos sabemos hacer.

Solución:
A pesar del insistente rumor apuntando hacia una burda manipulación de la agencia de inteligencia T.I.A., en el sentido de que el cordero en cuestión hubiera sido transportado, por helicóptero, nocturnamente, desde los pastos de Irlanda hasta la isla en cuestión, con el fin poco loable de calentar la mente de la comunidad científica; nosotros, ateniéndonos a la merecida fama del Pr. Souriau, validamos la primera hipótesis y trataremos de ayudar a los expertos a encontrar una solución al problema.

Para empezar, sinteticemos, siguiendo un orden cronológico, la información de la que disponemos y que presentamos en el cuadro siguiente, leyendo como nos es habitual, de arriba a abajo y de izquierda a derecha:

	***Amanecer* Día d**	Después de que los lobos terminasen de comerse a los corderos	Después de que los corderos se comiesen a las serpientes	Después de que las serpientes picaran a los lobos	***Amanecer* Día d+1**
Lobos	*a*	*a*	*a*	*a - (c - (b –a)) = b – c*	*b – c*
Corderos	*b*	*b - a*	*b - a*	*b – a*	*b – a*
Serpientes	*c*	*c*	*c - (b – a)*	*c – b + a*	*c – b + a*

$$X_d \xrightarrow{\quad A \quad} X_{d+1}$$

Este cuadro describe:

1) En la primera columna, al conjunto que llamamos X_d de animales {*a,b,c*} en este orden, presentes en la isla un día cualquiera, día que llamamos *d,* siendo *a* el numero de lobos, *b* el de corderos, y *c* el de serpientes, vivos al amanecer del día *d.*

2) El proceso evolutivo de "matanza y mutua comilona" que llamaremos ***->A*** y cuyo desarrollo vemos en las columnas 2, 3 y 4, leyendo estas desde la línea 2 hasta la 4.

3) En la última columna, al conjunto que llamamos X_{d+1} de animales {lobos, corderos, serpientes}, en este orden que, tras la matanza, quedan vivos al amanecer del día siguiente, día *d+1*.

Sino fuese por el proceso **->A**, en la isla no ocurriría nada en particular. Ningún animal se comería a otro, y los días pasarían pacíficamente (salvo presencia inopinada de la T.I.A).

->A, es el motor evolutivo, *la función*, $\boxed{\text{el operador}}$ que nos hace pasar del conjunto ordenado de animales vivos el día *d* : X_d , al conjunto ordenado de animales vivos el día *d +1* : X_{d+1}.
En el cuadro, hemos esquematizado este proceso evolutivo de la manera siguiente: $X_d \xrightarrow{A} X_{d+1}$ queriendo señalar con la flecha --> la $\boxed{\text{“trans-formación“}}$ de un objeto, en otro objeto (aquí, de un conjunto ordenado de números a otro conjunto ordenado de números).

Utilizando nuestra capacidad de abstracción, pasemos ahora de la descripción del proceso $X_d \xrightarrow{A} X_{d+1}$ a su resultado: $X_{d+1} = \mathrm{A} * \mathrm{X}_\mathrm{d}$ siendo $*$ el símbolo de una operación que queda por determinar, y que $\boxed{\text{arme}}$ a ***A*** del poder de transformar un objeto en otro

Esquemáticamente: 1) $X_d = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ y 3): $X_{d+1} = \begin{bmatrix} b-c \\ b-a \\ a-b+c \end{bmatrix}$

El símbolo $[\ ]$ representa a un contenedor cuyos elementos guardan un orden, - como el contenedor de escombros que todos conocemos, pero *ordenado* -. A este contenedor ordenado, si solo es de una columna se le llama $\boxed{\text{vector}}$. Si es de varias se llama $\boxed{\text{matriz}}$. La palabra matriz tiene este significado de “contenedor”. Contenedor que da “forma” y “orden” a los números o las letras que contiene, como es el caso del vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, o del vector $\begin{bmatrix} b-c \\ b-a \\ a-b+c \end{bmatrix}$ (una sola columna, a pesar de su apariencia).

Por extensión, ya que $X_d = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, también se llama vector al símbolo X_d. Ídem para matrices.

Es importante remarcar el *orden* en vectores y matrices. En X_d, la primera línea es el *hueco* asignado a los lobos y ocupado por el número *a*, la segunda, el *hueco* para los corderos, ocupado por el *b*, y la tercera, el *hueco* para las serpientes, ocupado por el *c*.

El orden nos parece obvio en los números: con las cifras 1, 2 y 3 por ejemplo, podemos formar el número 123 que evidentemente no es el mismo que el número 231.

Los números son contenedores de cifras ordenadas posicionalmente, tácitos contenedores para nosotros tan acostumbrados a verlos, pero contenedores. Sin embargo no todos los números lo son.
El número romano, por ejemplo, no lo es. Y si no, que se lo cuenten a los de T.I.A. que han tenido que tomar prestado el ordenador del jefe para sumar MCMXXV y DXCVI (1925 y 596 respectivamente) en números romanos. Écheles una mano a estos pobres, que están negros con este problema de romanos (¿Asterix, negro y en Roma?) y, sin utilizar nuestra numeración (¡no haga trampas!), sume “romanamente” estos dos números romanos. Si se vuelve loco...pues ya sabe la utilidad de un contenedor ordenado posicionalmente.

¿Que porqué los romanos utilizaban estos signos numéricos? ...Porque eran ganaderos en sus orígenes. Sí, ganaderos.... ¿Sigue sin verlo? Coja un hueso (o un palo), y ahora, con una navaja escriba en cifras 1925 Nada fácil... ¡No se corte los dedos!... Pruebe ahora a escribir: MCMXXV...Ya ve, todo tiene su razón de ser.
Solo los babilonios en parte (siglo XV AC.), los chinos, también en parte (siglo II AC.), los mayas (siglo III DC.) y los indios (siglo V DC.) fueron capaces de inventar una numeración posicional. Los mayas y los indios siendo además geniales co-inventores del cero, que representaron de *idéntica* manera: ***o***. Los babilonios con una numeración en base 60, los mayas en 20 (llevaban sandalias). Los chinos y los indios en 10.

Nuestra numeración, copia exacta de esta última, fue traída a occidente por el sabio toledano Abraham Ben Méir Ibn Ezra (1092 - 1167), modificando los caracteres sánscritos (1,2, 3...9 y el 0) que por aquél tiempo tenían apariencia extraterrena para un occidental, a caracteres hebraicos mucho mas usuales entonces, correspondientes a las 9 primeras letras del alfabeto hebreo (א,û,ü,ý,..., más un circulito ***o***, que el sabio llamó *cifra* (adaptación árabe del sánscrito *suuniya*, y que significa vacío). Posteriormente se volvieron a adoptar los caracteres sánscritos.

Un número, solo puede crecer horizontalmente y hacía un solo lado, el lado izquierdo, cuanto más grande, más largo (y solo a la izquierda, ya que la primera posición de la derecha está siempre ocupada por la unidad). Tiene una forma, una *morfología* unidireccional.

No así una matriz, que puede crecer tanto a lo ancho como a lo largo (también en profundidad o en cualquier dimensión que se desee). La *información* potencial inducida por su morfología es muy grande. Una llave (una *forma*) nos "in-forma" sobre el tipo de cerradura que puede abrir.
Mismos átomos *conforman* una molécula ú otra, totalmente distinta, según su *ordena*miento espacial. Como todos sabemos, bien distinto es el carbono del diamante, compuestos ambos sin embargo, por un único y mismo átomo, pero con una morfología distinta

Par terminar con el enunciado, se nos dice que el día del descubrimiento, que llamamos día 0, queda un solo cordero. Ya no quedan ni lobos ni serpientes. Situación que podemos condensar por:

Vector $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Al ser X_0 ordenado, sabemos que el hueco correspondiente a la segunda línea pertenece al grupo de los corderos. Leemos pues: el conjunto de animales el día del descubrimiento día d_0, representado por el vector X_0, está compuesto por: 0 lobos, 1 cordero y 0 serpientes.

Volvamos ahora al proceso ***->A.*** Tenemos que desmontarlo, analizarlo, y volver a montarlo, como si se tratara de un motor cualquiera (de hecho lo es por el *poder de transformación* que posee).

Comprendemos que para pasar del vector $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, al vector $\begin{bmatrix} b-c \\ b-a \\ a-b+c \end{bmatrix}$ no será suficiente una operación aislada, *una* suma o *un* producto sobre *un* elemento concreto del vector X_d.

¿Como transformar por ejemplo, el primer elemento *a* del primer vector, en el primer elemento *b – c* del segundo vector, si no es contemplando al vector, como un objeto *per se,* como un todo, como un bloque? Si lo contemplamos como un todo, sí que se nos puede ocurrir la manera de transformar

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ en *b – c,* ya que en $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ están presentes los elementos *b* y *c*. Si no fuese así, no sería posible.

Un vector está compuesto por los elementos que sean, pero, genéricamente, lo hemos *creado* y dado el nombre de "vector" para que tenga una entidad propia y así poder considerarlo como *un objeto* y operar sobre el como tal. No es un capricho matemático, sino una necesidad operativa, una necesidad de *un lenguaje estructurado* : el algebra.
Así, si para llegar al primer elemento *b – c* de X_{d+1}, tenemos que tomar en cuenta al vector X_d. Para llegar al segundo elemento *b – a* tendremos que volver a tomar en cuenta, una segunda vez, al vector X_d, y por fin, para llegar al último elemento *a – b + c,* otra vez más.

Por tanto, para pasar del vector X_d al vector X_{d+1}, podemos subdividir el proceso ***->A*** en 3 subprocesos que llamaremos: ***->L***, ***->C*** y ***->S***. tal que:

->L transforma $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ en *b – c*; ***->C*** transforma $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ en *b – a* y ***->S*** transforma $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ en *a – b + c*

Pasando ahora de la descripción de cada proceso, a su resultado:

L $* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ = b – c ***C*** $* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ = b – a ***S*** $* \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ = a – b + c

Vemos que (*b – c), (b – a)*, *(a – b + c),* no son más que una *combinación* de las letras que componen al vector X_d. Una combinación simple. En estos resultados, no aparecen ni a^2, ni a.b, ni $\sqrt{a}$, ni nada parecido, solo la combinación de las mismas letras sumadas entre si:
(*b – c), (b – a)*, *(a – b + c).* Una *combinación lineal* que transforma al vector X_d en un solo número, siendo éste (*b – c),* (*b – a)* o *(a – b + c)* según cual sea el proceso ***->L, ->C,*** o ***->S***.

Así, ***->L*** transforma a X_d en el *primer* elemento de X_{d+1}. Ídem para ***->C,*** que transforma a X_d en el *segundo* elemento de X_{d+1} y para ***->S*** que transforma a X_d en el *tercer* elemento de X_{d+1}.

->L, ->C, ->S y por consiguiente ***->A*** son *operadores lineales*. Este descubrimiento es crucial a la hora de poder hallar una clave al misterio de la isla.

Concentrándonos ahora en el proceso ***->S***, cuyos elementos quizás sean mas fáciles de inferir que los de ***L*** o ***C*** y, tratando de descubrir el mecanismo de la operación $*$, vemos que el resultado a – b + c es resultante de una *suma, suma* de los elementos del vector X_d, *ponderada* por ***S***.

Es decir, podemos interpretar el resultado de la acción ***S*** $* X_d$ como *(1).a + (- 1).b + (1).c.*
Un pequeño esfuerzo de deducción nos hace comprender que el proceso ***S*** se puede expresar mediante la creación de un *vector* ***S***, armado del mecanismo $*$, y que este vector ***S*** se

manifiesta como $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ expresando el mecanismo $*$ como producto del primer elemento del vector ***S*** con el primer elemento del vector X_d, el segundo con el segundo, el tercero con el tercero y sumándolos todos. Obteniendo así *(1).a + (- 1).b + (1).c*

Con el mismo razonamiento: ***L =*** $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}$ y ***C =*** $\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

Y ya que ***A*** = $\begin{bmatrix}L \\ C \\ S\end{bmatrix}$ porque así lo hemos construido, obtenemos ***A*** = $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$

Hasta aquí hemos diferenciado el proceso ***->A*** o ***(->L, ->C, ->S)*** de la matriz ***A*** o ***(L, C, S)*** De poco nos serviría una matriz, un cascaron, un contenedor lleno de números, si no pudiésemos llevar a cabo ninguna *acción* con ella. Sería un poco como tener un coche y no ponerlo nunca en marcha. Ahora que hemos descubierto que la operación $*$ arma a la matriz A de un poder de transformación, ahora, permitiremos que la matriz ***A,*** "se trague" a esta operación $*$. Este proceder es muy usual en cualquier tipo de lenguaje. Por ejemplo: el objeto "coche", que es a la vez una caja con 4 ruedas, estático, y una vez armado de un motor, un vehiculo que nos puede llevar de un lado para otro, dinámico. Cuando hablamos de un coche no tenemos que precisar *coche con motor*, la palabra coche "se ha tragado" a "motor".

Ya no hay impedimento para identificar a la matriz ***A*** con el proceso ***->A.*** Es un mismo *objeto* descrito en dos idiomas, el primero el algebraico, y el segundo, el español en este caso.

En estos últimos 50 años el hombre ha sido capaz de descubrir y de crear muchos distintos *lenguajes*. Descubrir algunas de las reglas del "lenguaje biológico" del cual se valen los genes para ensamblar proteínas. Crear un lenguaje informático como el COBOL, el Fortran o el Basic, u otros mas perfeccionados como son los lenguajes estructurados "orientados a objetos" que consideran el lenguaje como una *interacción* entre un conjunto de objetos dotados potencialmente se ciertas acciones o *métodos*, como es el C++ , el Visual Basic, el Java, o, ... el Algebra.

La diferencia esencial entre el lenguaje usual hablado, y el lenguaje algebraico es que el primero es un *lenguaje secuencial* –primero una frase, y después otra- mientras que el segundo es un lenguaje de interacción entre objetos -no hay orden cronológico- se crea un objeto definiéndole y dotándole de propiedades y atributos, así como de cierta funcionalidad: un *lenguaje estructurado*.
El lenguaje algebraico [(4)] permite tener una visión "mecanista" de los objetos que así se desarman y vuelven a armar con mucha comodidad, apreciando mejor su morfología.

Mohammad Ibn Musa al-Jowarizmi (780 – 850), de origen persa, autor del primer libro de algebra: al-*jabr W'al muqabala,* desde donde se encuentre, acaba de darle una palmadita en la espalda.
Al sabio al-Jowarizmi (de su apellido viene la palabra algoritmo) nuestra mayor admiración por haber sido capaz de combinar la numeración india con su creación de la "ecuación" tal como la conocemos ahora, aunque el signo =, se lo debamos al londinense Robert Recorde que asoció la dificultad que tenía en cruzar, allá por el año 1543, el Támesis, al no encontrar puente cercano (¿había niebla?), con la dificultad en resolver alguna ecuación que le ocupaba la mente. La providencia, a veces, hace bien las cosas: al encontrar por fin un puente que le pasara de una orilla a otra, ¡zás! encontró la solución a su problema: el "puente" que unía ambos términos, ambas "orillas" de su ecuación. Así fue como ese puente sobre el Támesis se transformo en el signo igual: =.

Volviendo a nuestro problema después de esta pequeña relajación mental:

Con ***A*** hemos hallado la manera de pasar de X_d a X_{d+1}.
Ahora nos toca ir más adelante en la resolución del problema. Tenemos la pretensión de hallar la "llave", si existe, que nos permita remontar el tiempo un número de días cualquiera *n*, desde el día del descubrimiento D_0, hacia atrás. Para el caso que nos ocupa n = 10 días que es el resultado de restarle al mes lunar (28 días) los 18 que nos indica el enunciado.

Si para pasar de X_d a X_{d+1} empleamos el operador ***A*** una sola vez, para pasar por ejemplo, de X_d a X_{d+2} tendremos que utilizar este operador ***A***, una vez y luego otra vez más, es decir: ***AA***.
De nuevo por un abuso de lenguaje, escribimos esto mismo como: $X_{d+2} = A^2 X_d$. Abuso, porque sabemos que ***AA*** es una forma relajada de escribir ***A*** $*$ ***A***, y que $*$ no es el producto aritmético usual, si no el proceso de combinación lineal que hemos descubierto más arriba y que generalizamos aquí:

Siendo ***A*** una matriz *m* por *n (m filas x n columnas)*, ***B*** una matriz *n* x *r*, el producto ***C = AB*** es una matriz *m* x *r* tal que el elemento (i, j) de ***C*** venga dado por:

$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}$

¿Como sería entonces A^2? ***A*²*=AA***
El primer elemento de A^2 es: $c_{11} = a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} = 0.0 + 1.(-1) + (-1).1 = 0 \ -1 \ -1$
y así sucesivamente. Con lo cual A^2 =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1-1 & 0+1+1 & 0+0-1 \\ 0-1+0 & -1+1+0 & 1+0+0 \\ 0+1+1 & 1-1-1 & -1+0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Resultado que nada tiene que ver con el que intuitivamente, hubiésemos imaginado.

A la inversa, si quisiéramos pasar de X_{d+2} a X_d tendríamos que poner "la marcha atrás" o inversa a nuestro proceso ***A*** es decir, **<- *A.***

No todos los procesos son invertibles. Un proceso es $\boxed{\textit{invertible}}$ si la información contenida en tal proceso es una información completa, genuina, no redundante. Veamos algunos ejemplos de procesos invertibles lo unos, y no invertibles los otros:

a) Desde el 22 de la calle Gran Vía, coger la primera a la izquierda, recorrer 100 metros.
b) Coger un taxi e ir desde donde estamos hasta el aeropuerto.
c) Hallar un entero positivo raíz cuadrada de 49.
d) Rotar de + 60º al vector *Z.*
e) Proyectar un punto X sobre el eje de las absisas.

a) Es invertible. El proceso contiene toda la información necesaria para que recorriendo este proceso hacía atrás, vuelva al punto de partida: el 22 de la calle Gran Vía.
b) No es invertible. Aunque yo sí sepa desde donde he cogido el taxi, el enunciado no guarda referencia de ello. El proceso no es invertible.
c) Es invertible. "Raíz cuadrada" conserva implícitamente el proceso llevado a cabo para tomar tal raíz cuadrada y este proceso es invertible.
d) Es invertible. Rotamos el vector resultado de -60º y volvemos a encontrar al vector *Z*.
e) No es invertible. La información relativa a la posición inicial de X se ha perdido, esta puede ser cualquiera en la recta perpendicular al eje que pasa por el punto de proyección.

Para un *proceso lineal*, como es el proceso ***A***, el proceso inverso **<- *A***, sí existe, es el inverso del proceso. Su escritura algebraica, por lo tanto, se identifica con la "*inversa*" de la matriz ***A***.

que escribiremos $\boldsymbol{A}^{-1}$. Además, es indiferente ir n veces hacía atrás que aplicar el proceso inverso después de haber ido n veces adelante: $A^{-n} = (A^{-1})^{n} = (A^{n})^{-1}$.

Por lo tanto: $X_d = (A^2)^{-1} \cdot X_{d+2}$; -1, significando el hecho de ir para atrás.

Tenemos que ver si existe la inversa de ***A***, y de existir, ser capaces de encontrar algún mecanismo que nos permita calcularla.

Algo en la morfología de ***A*** nos debiera dar una pista sobre la existencia o no de su inversa. Para no perder información, al darle la vuelta, la forma de ***A*** tiene que conservarse. Esto solo es posible si, externamente, la forma de ***A*** es un cuadrado. Desgraciadamente este hecho es necesario pero no suficiente, no solamente su morfología *externa* debe de cumplir con este requisito sino también su morfología *interna* tiene que poder sufrir esta operación de inversión sin amputársele información. Un ejemplo en aritmética de esta pérdida de información: si escribo: 14 – 7x2 = 0 y conservo solo el resultado: 0, no tengo manera de saber como he llegado a este resultado. La información que me permitiría tal cosa, se ha perdido.

Una matriz no es un objeto unidimensional, tiene morfología interna, un lado derecho, un lado izquierdo un arriba y un abajo. Tiene también una diagonal, o mejor, dos diagonales, una que va de izquierda a derecha, y otra de derecha a izquierda. Estas recogen en su totalidad la morfología interna de una matriz; y es una combinación de las diagonales lo que nos permitirá saber si una matriz es invertible o no. A esta combinación de las diagonales que da como resultado un escalar[5], un simple numero, se llama en algebra *determinante*.

El determinante "escanea" la morfología interna de la matriz y "determina" si es invertible o no.

Si el determinante de ***A*** es cero, *det(**A**) = 0*, la información contenida en A no es suficiente para permitir que ***A*** sea invertible. De lo contrario, si *det(**A**)* $\neq$ *0* la matriz ***A*** es invertible.

Con $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$ definimos su determinante como ***det (C)*** $= c_{11}.c_{22} - c_{12}.c_{21}$

Así, si $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, ***det (C)*** = 1.4 – 2.3 = 4 – 6 = -2, y ***C*** es invertible.

Si $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, ***det (B)*** = 1.6 – 3.2; ***det (B)*** = 0; **B** no es invertible ¿Porqué? Porque si el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, primera columna de B, es el abuelo de Juan, el vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ segunda columna de B, es el padre del padre de Juan. Ya que $\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

La información que nos proporciona el segundo vector, es morfológicamente redundante con la que nos aporta el primero: solo nos expone que es 3 veces mayor que aquel. Al apuntar los dos vectores en la *misma* dirección, nos vemos frustrados de construir un proceso bidimensional con la matriz ***B***, este proceso es solo unidimensional, mientras que su contenedor es bidimensional. Por ello, el proceso ***B*** no es invertible.

Para obtener el determinante de una matriz cuyas dimensiones sean mayor que 2, se emplea un método de cálculo recursivo: el determinante de una matriz de dimensión 3x3 se calcula a partir del conocimiento del cálculo de una matriz de 2x2, y así sucesivamente.

Llamando *determinante adjunto*, ***det (Aij)*** de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo la i-ésima fila y la j-ésima columna, y afectándole con un signo positivo si *i* + j es par, negativo si es impar (perdón por el "rollo"),

Si $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ entonces ***det (A)*** $= a_{11}$ ***det (A₁₁)*** $- a_{12}$ ***det (A₁₂)*** $+ a_{13}$ ***det (A₁₃)***

En el caso que nos ocupa: $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; por lo tanto

det (A) = 0. *det* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ - 1. *det* $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ + (- 1).*det* $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ = 0.(1) – 1.(-1) – 1.(0) = 1

Sabemos ahora que nuestra matriz ***A*** es invertible puesto que su determinante no es cero. Bueno, como diría el primer astronauta que pisó la Luna (Neil Armstrong -1969-) al saltar desde la escalerita del modulo lunar al suelo (lunar): Este ha sido un gran paso para mí y un pequeño para la humanidad (¿o fue al revés, y más bien dijo: este ha sido un pequeño paso para mi y un gran paso para la humanidad?)

Al ser invertible nuestra matriz ***A,*** entendemos que el problema de desentrañar cuantos animales de cada especie hubo al amanecer, diez días antes del descubrimiento tiene solución... Queda ahora por averiguar como llevar a cabo esta operación.

Esta matriz inversa que perseguimos, debe de ser tal que, después de haber aplicado al vector X_d el proceso ***A***, y obtenido como resultado el vector X_{d+1}, aplicando el proceso inverso, $\boldsymbol{A^{-1}}$ al vector resultado, volvamos a reencontrarnos con el vector inicial, el vector X_d.

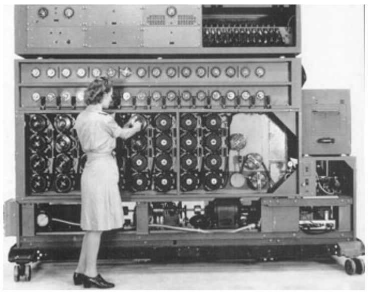
Esquemáticamente: $\mathrm{X_d} \xrightarrow{\mathrm{A}} \mathrm{X_{d+1}} \xrightarrow{\mathrm{A^{-1}}} \mathrm{X_d}$

Volvamos a resumir lo que buscamos, recopilando lo que ya tenemos:

Buscamos $\mathrm{X_{10}}$, sabiendo que:

$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$; *n* = 10; $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; det(***A)*** = 1; $\boxed{\mathrm{X_{10} = A^{-10} X_0}}$

Falta por saber como invertir la matriz ***A***, e invertirla 10 veces (¿10 veces?)
Hemos visto que $A^{-n} = (A^{-1})^{n} = (A^{n})^{-1}$. Lo cual significa que en vez de calcular A^{-10} podemos calcular $(\mathrm{A}^{10})^{-1}$ <u>Esto sigue siendo una solución poco aceptable</u> ¿Y si en vez de 10, n fuese 100? ¿Tendríamos que repetir 100 veces el producto matricial: A*A*A*A....*A, y luego invertir la matriz resultante? Por muy agradable que sea la Isla del Pr. Souriau, el producto matricial no lo es. La Isla se puede rápidamente transformar en un infierno, y... ¡los antropólogos transformarse en antropófagos!



“Bomba” aparato descifrador concebido por los matemáticos polacos M. Rejewski, J. Rózyscki y H. Zygalski. Al caer Polonia, estos formaron parte del equipo de Turing en Bletchley Park.

Para relajar (un poco) la tensión mental acumulada hasta ahora, por un momento, vamos a invocar la memoria del profesor Turing. El gran matemático británico Alan M. Turing[(6)] (1912 – 1954) fue capaz, con la valiosa ayuda de varios miles de mecánicos especialistas en matrices -“hackers” diríamos hoy-, de desmontar el formidable motor “Enigma”, motor que “transformaba” las ordenes del alto mando militar alemán, y que iban dirigidas a sus submarinos, en una serie de cifras y letras terriblemente difícil de interpretar. Los aliados necesitaban a toda costa poder localizar dichos submarinos para poder subsistir, y para ello comprender las órdenes que estos recibían. De hecho, históricamente es conocido que el tal Enigma fue la mayor pesadilla del gran estratega británico y primer ministro durante la segunda guerra mundial, Sir Winston Churchill.

Que se sepa no hubo que lamentar ninguna victima por antropofagia en el equipo del Profesor Turing ¿Porqué? porque eran británicos... ¡No!, no es que los británicos fuesen menos antropófagos que otros pueblos caníbales, sino que (en aquella época) utilizaban peniques, chelines, libras y coronas para hacer sus compras y no existían todavía los ordenadores, solo el propio cerebro (el de cada cual).
Acostumbrados a pasar de una base a otra (base 12 a 20 y luego a 13 por ejemplo), para multiplicar mentalmente 4 por 18, factorizaban la operación: 4 por 9, dos veces -es decir 4.9.2 -, o 4 por 3, 6 veces: -es decir 4.3.6 -. Todo esto nos parece ridículamente evidente.
No es evidente cuando se trata de producto matricial. Además el beneficio puede llegar a ser enorme. Pongamos un ejemplo:

Supongamos una matriz $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y un vector $V_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ Veamos el proceso $\boldsymbol{B}*V_0$:

$\boldsymbol{B}V_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1+2.2 \\ 1.4+2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = 5.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{5}V_0$ ¿magia potágia?

Dicho esto en el lenguaje hablado, alto y claro: El proceso ***B*** aplicado a V_0 da como resultado el <u>mismo</u> V_0, multiplicado por un escalar, 5 en este caso. ¿Como puede ser posible? ¿Da lo mismo multiplicar V_0 por la matriz ***B*** que por el número 5 ?
¡Que no cunda el pánico!... ahora viene lo mejor... porque si tenemos que llevar a cabo el proceso $\boldsymbol{B}*V_0$ n veces seguidas... -cualquiera que sea n-, el resultado será: ... (¡Ni el mago Tamaríz lo haría mejor!), el <u>mismo</u> V_0, multiplicado por el escalar 5, <u>n veces</u>.

Genial, fantástico, maravilloso... Nos vamos a dar el gusto de llevar a cabo $\boldsymbol{B*B*B}.V_0$ *sin ejecutar ningún producto matricial*:

$(\boldsymbol{B*B*B}).V_0 = B^{\mathbf{3}}V_0 = 5^3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 125\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 \\ 250 \end{bmatrix}$ A este "humilde" 5, escalar perdido entre matrices se le da el nombre, en la literatura anglosajona de: $\boxed{\textit{Eigenvalue}}$ (Eigen, del alemán: propio, individual, particular, peculiar) y que en español se suele llamar $\boxed{\textit{valor propio}}$ de la matriz B. El vector V_0 lleva el nombre de Eigenvector, o vector propio.

Está claro que aquí, (como en toda magia potágia), hay trampa: solo se puede reemplazar una matriz ***B*** por un escalar cuando el vector V_0 sea vector propio de ***B***...pero no amarguemos la fiesta...¿Sabe como ejecutar $\boldsymbol{B}^{-1}V_0$ sin que tener que invertir B?...

Pues claro: $\boldsymbol{B}^{-1}V_0$, ...tarí tarí... $= 5^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0{,}2.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ así de fácil.

Esta es la misma idea que puso en práctica el equipo del profesor Turing con Enigma:
<u>hallar *factorizaciones* fulminantemente útiles a la hora de reventar códigos secretos</u>. +

Nosotros, vamos a aplicar esta idea en resolver $A^{-10}X_0$, tratando de no reventar nada....

Claro que aquí tenemos un problema (¿Llamamos a Houston?) y es que, ni X_0 es un vector propio de ***A,*** (un Eigenvector), ni tampoco sabemos como hallar tales vectores... Habiendo llegado hasta aquí, no nos vamos a rendir por tan poco :-)
Supongamos que existen tales vectores propios. ¿Cuantos vectores propios existen para una matriz cuadrada, invertible, de dimensión 3 (3 líneas por 3 columnas) como es la matriz ***A***? ¿Cuantas direcciones "privilegiadas" puede tener una matriz con información no "redundante", que no le "falte", ni le "sobre" nada, y que éstas generen un espacio de 3 dimensiones? Pues... 3 vectores propios. Llamemos a estos 3 vectores propios de ***A***: U, V, W.

¿Pero U,V,W. no representan nada “tangible” en el lenguaje usual hablado? ... Cierto, ¡Esta es la razón por la cual necesitamos del Algebra!...

Cualquier información, como por ejemplo, la contenida en el vector $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, puede ser expresada mediante la combinación adecuada de estos 3 vectores propios U, V, W, sin que ésta se vea alterada de ninguna manera. Su formulación no será idéntica, su significación si.

Cuando expresamos al vector X_0 como $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ estamos diciendo que X_0 corresponde al punto cuyas coordenadas son: 0 en el *eje Lobo*, 1 en el *eje Cordero* y 0 en el *eje Serpiente*. Hemos expresado X_0, en *notación vectorial*, respecto de unos “ejes”. Podemos exponer lo mismo con respecto de otros “ejes”, o, podemos expresar lo mismo como *resultado*:
X_0 = 0.Lobo + 1.Cordero + 0.Serpiente, combinación lineal de los vectores: Lobo, Cordero y Serpiente, ponderados por el peso de cada uno: 0, 1, 0. No “falta” información, ni tampoco “sobra” en la expresión de X_0. Pero ésta es, como era de esperar, relativa al ordenamiento, a los “ejes” L, C, S, (por Lobo, Cordero, Serpiente).
Lastima, pero estos *NO* son los ejes privilegiados, los “ejes” formados por los vectores propios de ***A***. Los “ejes” privilegiados, “fulminantemente útiles” porque vectores propios, son los “ejes” U, V, W. No los “ejes” L, C, S.

Bien, ¡no pasa nada! Como U, V, W. generan el mismo espacio de 3 dimensiones que Lobo, Cordero, Serpiente, X_0 *también* puede expresarse como una combinación de estos vectores propios: $X_0 = \alpha.U + \beta.V + \gamma.W$, siendo <u>$\alpha$, β, γ escalares</u>, pesos, (números), como lo son 0, 1, 0 en la expresión: X_0 = 0.L +1.C + 0.S
Si digo “amarillo”, manifiesto lo mismo que si digo “yellow”...Proyecto la misma idea en dos lenguajes distintos, y el diccionario me permite pasar de uno a otro. Aquí proyectamos X_0 en dos sistemas distintos de ejes llamados en algebra $\boxed{\textit{bases}}$. La base: L, C, S, Lobo, Cordero, Serpiente y la base: U, V, W.

La infernal expresión matricial $X_{10} = A^{-10}X_0$ se transforma en $X_{10} = A^{-10}(\alpha.U + \beta.V + \gamma.W)$ igual de matricial e infernal, pero que a su vez, gracias al hecho de ser U, V, W, vectores propios de ***A*** pasa a la expresión: $X_{10} = (\lambda_u^{-10}).(\alpha.U) + (\lambda_V^{-10}).(\beta.V) + (\lambda_W^{-10}).(\gamma.W)$, donde ya <u>no</u> hay manifestación matricial: λ_u, λ_v y λ_w siendo escalares puesto que valores propios (eigenvalues) de ***A.***

Bueno, como estamos en la Isla del Pr. Souriau y sobra tiempo, podemos pensar ahora en como hallar la manera de calcular tanto los valores propios como los vectores propios de una matriz.

Calculemos los valores propios de ***A***: De la definición que hemos dado a valor propio λ de una matriz ***A,*** escribimos:

A $X_0 = \lambda X_0$, que expresamos como: $(A - \lambda I) X_0 = 0$, siendo $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ el operador identidad de misma dimensión que ***A***, y que solo sirve para que el escalar λ se transforme en la matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ y así poderse efectuar la operación de suma matricial ***A* - λI** , y que se lleva a cabo *elemento de la primera* matriz **+** *elemento de la segunda*.

Al expresar (***A*** - λI) X_0 = 0, manifestamos que el proceso ***P*** = (***A*** - λI) transforma el vector X_0 en 0. Hemos visto que esto significa que ***P*** no es invertible y que por tanto ***det*** (P) = 0 es decir que det(***A*** - λI) = 0 Desarrollando ésta ecuación:

$$\textbf{det}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \textbf{det}\left(\begin{bmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}\right)$$ = factorizando por la 3ª columna y recordando la definición de determinante adjunto:

$$\det(A - \lambda I) = -1.\det\begin{bmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - 0.\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + (1-\lambda).\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Con det $\begin{bmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ = 1- (1 - λ) y det$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$ = $\lambda^2 - \lambda + 1$ obtenemos

det(***A*** - λI) = -1. (1- (1 - λ)) + (1 - λ). ($\lambda^2 - \lambda + 1$) de donde: $\boxed{\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0}$

Expresión que se conoce como $\boxed{\textit{ecuación característica de } \boldsymbol{A}.}$

Al polinomio ***p*** = $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1$ se le llama $\boxed{\textit{polinomio característico de } \boldsymbol{A}.}$

¿Porqué característico? porque las soluciones de la ecuación característica de ***A***, llamadas $\boxed{\text{.raíces}}$ o $\boxed{\textit{ceros}}$ de este polinomio ***p***, <u>son los valores propios (Eigenvalues) de la matriz ***A***.</u>

Busquemos las posibles soluciones se esta ecuación: $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$. ¿Es 1, por ejemplo, una solución? Si lo fuese, tendríamos verificado que: $(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 1 = 0$ ¿Es esto cierto? $(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 1 = 1 - 2 + 3 - 1 = 1$ y 1 es distinto de 0, luego <u>no</u> es cierto y por lo tanto 1 no es una solución de esta ecuación. ¿Como hallar las soluciones o raíces de esta ecuación?

p es un polinomio de 3º grado. El teorema fundamental del algebra, que demostró Gauss en 1797, nos dice que un polinomio del 3º grado tiene 3 raíces, iguales o distintas, reales o <u>complejas[(7)]</u>.

Si hacemos λ = 0 vemos que ***p*** = **-** 1. Haciendo λ = 1 acabamos de ver que ***p*** = 1.

Si ***p*** cambia de signo cuando λ=0 y λ=1, significa que ***p*** = 0 para algún valor de λ comprendido entre 0 y 1 puesto que ***p*** no puede cambiar de signo sin pasar por cero. Por lo tanto una de las tres soluciones de ***p***, se sitúa entre 0 y 1. Mediante aproximaciones sucesivas, encontramos que ésta raíz, o solución es: λ_1= 0,43016. λ_1 = 0,43016 es un valor propio de la matriz ***A.***

Los otros dos valores propios de ***A***, λ_2 y λ_3 son números complejos conjugados:
λ_2 = 0,7849 + 1,3071i y λ_3 = 0,7849 – 1,3071 i cuyos módulos o valores absolutos vienen dados por: $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{\{(0{,}7849)^2 + (1{,}3071)^2\}}$ = 1,5247. Siendo estos mayores de 1, cuando vayamos a elevarlos a una potencia negativa serán extremadamente pequeños

(Por ejemplo 1,5247-^{10} = 0.012) en comparación con λ_1 (0,43016 $^{-10}$ = 4610). Por lo tanto, cuando vayamos a efectuar el cálculo de X_{10}, consideraremos que:

$$\boxed{\lambda_1 = 0{,}43016; \quad \lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = 0}$$

Las propiedades espectrales [8] del polinomio característico ***P*** permiten que la expresión:

X_n = $(\lambda_1^{-n}).(\alpha.U) + (\lambda_2^{-n}).(\beta.V) + (\lambda_3^{-n}).(\gamma.W)$ se escriba como:

$$X_n = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1-\lambda_1+\lambda_1^2 \\ 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \frac{\lambda_1^{-n}}{3\lambda_1^2-4\lambda_1+3} + \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1-\lambda_2+\lambda_2^2 \\ 1-\lambda_2 \end{bmatrix} \frac{\lambda_2^{-n}}{3\lambda_2^2-4\lambda_2+3} + \begin{bmatrix} \lambda_3 \\ 1-\lambda_3+\lambda_3^2 \\ 1-\lambda_3 \end{bmatrix} \frac{\lambda_3^{-n}}{3\lambda_3^2-4\lambda_3+3}$$

Como hemos visto que para el cálculo numérico, λ_1 =0,43016, λ_2=0 λ_3=0 y que para nuestro problema n = 10 (10 días), entonces:

$$X_{10} = \begin{bmatrix} 0{,}43016 \\ 1-0{,}43016+0{,}43016^2 \\ 1-0{,}43016 \end{bmatrix} \frac{0{,}43016^{-10}}{3.0{,}43016^2-4.0{,}43016+3} = \begin{bmatrix} 0{,}43016 \\ 0{,}7549 \\ 0{,}5698 \end{bmatrix} \frac{4610}{1{,}8345}$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}43016 \\ 0{,}7549 \\ 0{,}5698 \end{bmatrix} .2{,}5129 \quad = \quad \boxed{X_{10} = \begin{bmatrix} 1081 \\ 1897 \\ 1432 \end{bmatrix} \begin{matrix} lobos \\ corderos \\ serpientes \end{matrix}}$$

<u>Comprobación por la “cuenta de la vieja”:</u>

Con $X_{10} = \begin{bmatrix} 1081 \\ 1897 \\ 1432 \end{bmatrix}$ calculemos uno tras otro, $X_9, X_8, X_7 .....X_0$ y comprobaremos si este

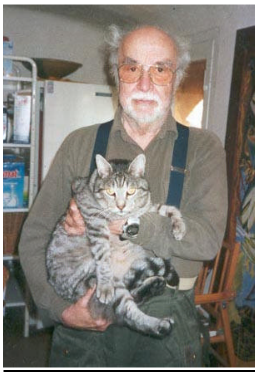
X_0, obtenido por la “cuenta de la vieja” es el mismo que el que no da el enunciado $X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$X_9 = \begin{bmatrix} b-c \\ b-a \\ c-b+a \end{bmatrix}$$ o sea, $$X_9 = \begin{bmatrix} 1897-1432 \\ 1897-1081 \\ 1432-1897+1081 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 465 \\ 816 \\ 616 \end{bmatrix}$$; idénticamente actualizando cada vez *a, b*, y *c*: según los días van pasando, obtenemos:

$$X_8 = \begin{bmatrix} 200 \\ 351 \\ 265 \end{bmatrix} \quad X_7 = \begin{bmatrix} 86 \\ 151 \\ 114 \end{bmatrix} \quad X_6 = \begin{bmatrix} 37 \\ 65 \\ 49 \end{bmatrix} \quad X_5 = \begin{bmatrix} 16 \\ 28 \\ 21 \end{bmatrix} \quad X_4 = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 9 \end{bmatrix} \quad X_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

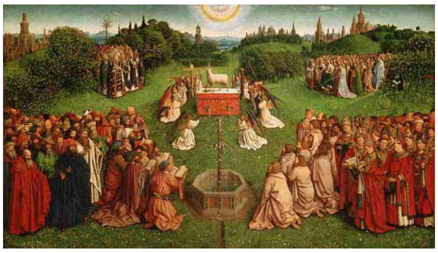
$$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ y finalmente $$X_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ Comprobamos que efectivamente llegamos a la misma matriz X_0

NOTAS



El Profesor J. M. Souriau

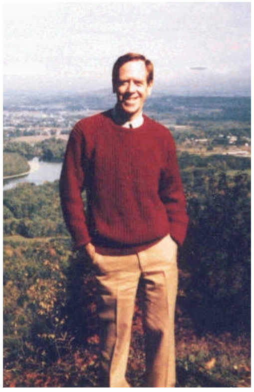
(1) Jean Marie (Papy) Souriau, (Marseille 1932- Francia) matemático, pionero de la geometría simpléctica, autor de varios libros teóricos entre otros: Géométrie et Relativité (Hermann 1964) y Calcul Linéaire (P.U.F 1964) y en donde aparece este problema en el capitulo VI dedicado a elementos espectrales de un operador lineal invertible.



Jan Van Eyck “Agus Dei”

(2) Bueno, ¡¡vale!!...un cordero no se come a ninguna serpiente. Pero en ésta historieta sí...Además si se empeña, vaya a la catedral Saint-Bavon en Gante (Belgica), donde nació Carlos V. Allí está expuesto el retablo de Jan Van Eyck (1492) “Agnus Dei ”...El tal cordero de Dios quita los pecados de este mundo... y para ello,... se come a la serpiente

(3) Esta historieta no quiere ser injusta con los antropólogos. Si hay gente en este mundo que sí sabe de algebra lineal son ellos, ya que tienen que afrontar continuamente problemas de este tipo, y éste es muy sencillo...



El Profesor Gilbert Strang

(4) El Massachussetts Institute of Technology a través de su programa de educación OpenCourseWare MIT OCW http://ocw.mit.edu ha puesto gratuitamente a disposición de cualquier interesado en Algebra Lineal un fantástico curso en video "on line" presentado por el profesor Gilbert Strang. Los expertos de la Isla del Pr. Souriau se lo recomiendan.

(5) Viene de Latín "scala" que significa escalera. Como los peldaños de una escalera son equidistantes y sugieren una escala y que en geometría, el producto de un vector por un número solo cambia la longitud (o escala) de éste, a una constante que multiplique un vector se la ha dado, en Algebra Lineal, el nombre de: escalar.

(6) 

Profesor
Alan M. Turing

Alan Mathison Turing (Londres 1912 - Londres 1954) se suicido comiendo una manzana inyectada con cianuro. En aquella época ser homosexual, como lo era Turing, caía bajo la ley:

« Gross Indecency contrary to Section 11 of the Criminal Law Amendment Act 1885 »

La T.I.A. de turno tuvo probablemente miedo de que la K.G.B. tomase el control de la vida sexual de Turing, obligándole en contrapartida a revelar algún secreto.... Corre la leyenda de que el nombre de Apple (manzana) y su logo, guarda relación con aquella tragedia.

(7) Vea la historieta: "Bonaparte, Junot, Fourier y los Hedge Funds" (www.advantage-finance.com/educational/fourier0.pdf) en este mismo site de advantage-finance.com

(8) Propiedades espectrales se refiere a propiedades relativas a la descomposición en elementos simples de un polinomio

----

Click or copy and paste this url: http://www.advantage-finance.com/esp/ecodmail.htm to send me an e-mail

Last modified: December 105th 2007

